مطالعه و تحقیقی پیرامون :

Facility Location problem

مسئله مکان یابی ماشین

جمشید ناظمی

خرداد ماه ۸۰

با هدایت و راهنمایی :

دکتر محمد جواد اصغر پور

مقدمه :

تئوری مکـان یابـی در رابطه با مسائلی است که انتخاب بهترین مکان در یک محدوده معین را برای یک ماشین یا سرویس دهنده را مورد ارزیابی قرار میدهد به نحویکه تابع هدف خاصی را بهینه نماید. مثالهایـی از ایـن نوع مسائل را میتوان تعیین مکان ایستگاه آتش نشانی، محل یک کارخانه، محل فرودگاه، انبار و ... نام برد.

ساختار مدل ریاضی مسئله مکان یابی به محدوده مکانی مسئله برای مکان یابی و کیفیت ارزیابی (تـابع هـدف) ارتـباط دارد و در ادبیات این مسئله نیز متناسب با تابع هدف و تعریف مسئله ، راه حلها و مدلهای مختلفی ارایه شده است.

در تحقـیق جـاری ابـتدا ادبـیات موضـوع مـورد بررسـی قرار گرفته و انواع راه حلها و مدلهای مخـتلف ارایـه شـده طـرح میگردد . سپس بطور خاص به گروهی از مسائل که تعریف مسئله امکان آن را فـراهم کرده است تا مدل بر روی یک گراف قابل تطبیق باشد با جزییات بیشتر مورد بررسی قرار گرفته و روشهای حل آنها ارائه شده است .

مسئله پایه مکان یابی ***(Pure Location)***

مسئله مکان یابی چند ماشین (Multi facility Location Problem) ، یافتن جواب بهینه برای n ماشین جدید برای برآوردن تقاضا برای m مشتری یا دستگاه موجود است. مدل خطی فاصله به شرح زیر است :

$$\min imize \sum\sum w_{ij} L_p(X_i, P_j) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i+1}^{n} V_{ik} L_p(X_i, X_k)$$

که در آن :

W_{ij} : هزینه سالیانه ماشین جدید i با ماشین موجود ، j برحسب فاصله است.

V_{ik}: هزینه سالیانه یک ماشین جدید i با ماشین جدید k برحسب فاصله است.

$X_i : (X_i, y_i)$ مختصات دستگاه موجود i را نشان میدهد.

$P_j : (a_j, b_j)$ مختصات یک دستگاه موجود j را نشان میدهد.

معیار فاصله در این مدل عبارتست از :

$L_p = (X_i, P_j) = [|x_i - a_j|^p + |y_i - b_j|^p]^{\frac{1}{p}}$ که در آن $\{1 \le p \le 2\}$است.

در صـورتیکه n=1 باشد،در اینصورت مسئله (Single Facility Location Problem) مکان یابـی برای یک ماشین تعریف میشود و با انتخاب مقادیر مختلف برای p ، مدلهای مختلفی بدست میآید که بدان پرداخته میشود.

مسائل مکان یابی خط مستقیم Rectilinear Distance Location Problems

مسـئله مکان یابی در خط مستقیم یکی از حالتهای MFLOC[۱] است که در آن p=1 است. دلیل آنکـه روش فاصـله خـط مستقیم کاربرد یافته است وجود خیابانها در شهرها و یا راهروها در کارخانه و انـبار اسـت کـه فاصله مستقیم بهترین کاربرد را برای این دسته فاصله ها دارد. در حالتیکه L_1 در مدل پایـه مکان یابی استفاده شود، تابع هدف به دو زیرمسئله x و y تفکیک شده و مسئله تبدیل به برنامه ریزی خطی میشود.

مسئله یک ماشین SFLOC[۲] اولین بار توسط فرانسیس (۱۹۶۹) حل شد. وی یک روش ساده میانه مکان را برای جواب بهینه بدست آورد. بعدها (۱۹٦٤) وی یک حالت خاص از مسئله چند ماشین را که در آن ماشـینها دارای وزن مسـاوی بودنـد حل نمود. راه حلهای مختلفی برای این مسئله پیشنهاد شده است. کابوت (۱۹۷۰) روش جریان شبکه را پیشنهاد نمود. پریستکروگیر (۱۹۷۰) روش گرادیان را پیشنهاد نمودند. رائـو (۱۹۷۳) نشـان داد که روش دوم یک نحوه برخورد برنامه ریزی خطی است و در صورت بروز جواب صفر (Degenerate) ، جواب بهینه بدست نمی آید.

---

[۱] Multi Facility Location Problem

[۲] Single Facility Location Problem

وسولوسکی و لاو (۱۹۷۱) و موریس (۱۹۷۵) نشان دادند که مسئله با محدودیتهای خطی را میتوان با برنامه ریزی خطی حل نمود.

از روشهای دیگر برای حل MFLOC ، روش تقریب غیرخطی ارایه شده توسط وسولوسکی و لاو (۱۹۷۲) است که در آن هر تعداد محدودیتهای خطی و یا غیر خطی که بتواند یک فضای محدب را ایجاد کند را شامل میشود و روش تقریب درجه دوم پیشنهادی توسط ایستر (۱۹۷۳) قابل استفاده است. الگوریتم دیگری مبتنی بر روش سیمپلکس توسط شرالی وشتی (۱۹۷۷) ایجاد شد. پیکارد و راتلیف مسئله را با (m-1) برش بر روی شبکه ای از (n-2) کناره حل نمودند. کولن (۱۹۸۱) نشان داد که دو روش برش بر روی شبکه و الگوریتم سیمپلکس شرالی وشتی با هم یکسان هستند و تنها از نظر محاسبات با هم تفاوت دارند.

ویرایش اصلاح شده برای الگوریتم پیکارد و راتلیف توسط چیونگ (۱۹۸۰) ارایه شد.

مسائل فاصله هندسی

در صورتیکه در مدل پایه مکان یابی p=2 باشد مسئله مکان یابی چند ماشین با فاصله هندسی بوجود می آید (EMFL)[3] . در صورتیکه n=1 باشد مسئله به مکان یابی یک ماشین تبدیل میشود، (ESFL)[4] .

براساس مطالعات روزن و اکسو (۱۹۹۳) همواره یک جواب بهینه برای مسئله ESFL که ماشینها در یک خط باشند وجود دارد که در آن محل ماشین جدید با یکی از ماشینهای موجود منطبق میشود. به همین دلیل معمولا مسائل مکان یابی که در آن ماشینها در یک راستا نیستند مورد بحث قرار میگیرند.

برای این نوع مسئله، ویزفیلد (۱۹۳۷) یک روش تکرارپذیر را که بنام خود وی ثبت شده است پیشنهاد نمود. همچنین کوپر (۱۹۶۳) و کوهن و کیون (۱۹۶۲) با همین اصول مسئله مشابه ای را حل نمودند. سپس کوپر و کاتز (۱۹۸۱) یک روش بهینه گرادیان که مبتنی بر یک برازش درجه دوم غیر دقیق بود برای مسئله ESFL پیشنهاد نموده و برتری آن را در اغلب موارد بر روش ویزفیلد نشان دادند. اگرچه رادو (۱۹۸۸) تاکید نمود که درصورتیکه روش ویزفیلد به جای روش گرادیان استفاده شود همگرایی کامل حاصل میشود و اندازه گامها در مسئله نیز همگرا میشود.

تابع هدف در مسئله ESFL محدب و غیرقابل تجزیه است. غیرقابل تجزیه بودن در تعداد محدودی از نقاط که مکان ماشین جدید بر مکان ماشین موجود منطبق شود بروز میکند (روزن و اکسو، ۱۹۹۳). لذا انتظار میرود که وقتی که مکان ماشین جدید بر یکی از ماشینهای موجود منطبق گردد، همگرایی روش ویزفیلد خیلی آرام باشد. برای جلوگیری از این رفتار اوسترچ (۱۹۷۸) ، بالاس و یاو (۱۹۸۲) ویرایشی از روش ویزفیلد را توسعه دادند. در این روش گامی تعبیه شده است تا در صورتیکه مکان بر روی

---

۳ Euclidean Distance Multi Facility Location Problem

۴ Euclidean Distance Single Facility Location Problem

یکـی از نقــاط موجود منطبق گردد جواب را به سمت بهینه هدایت کند. با این گام، مسئله ESFL به یک مسئله هموار تبدیل میشود(روزن و اکسو، ۱۹۹۳).

اکاردت (۱۹۸۰) مسئله را در شرایط معمول بررسی نمود. در سال ۱۹۸۷، ۱۹۸۹، اکسو روش درجه دومـی را بـرای حـل مسـئله ESFL از نـوع با محدودیت توسعه داد و اثبات نمود برای هر نقطه شروع، الگوریتم وی یا در نقطه بهینه می ایستد و یا توالی را ایجاد میکند که به صورت درجه دوم به سمت جواب بهیـنه همگـرا میشـود. درزنـز (۱۹۸۵) آنالیز حساسیت برای مسئله ESFL انجام داد و چندین موردکاوی انجام داد که در آن ماشینهای موجود محدود به فضای کوچکی بوده وارزش وزنی هر یک محدود به یک دامنه مشخص هستند.

بـرای مسئله EMFLP ، فرانسیس و کابوت (۱۹۷۲) اثبات نمودند که تابع هدف محدب است و این تابع با اطمینان محدب است اگر:

i =1,…,n و $S_i = \{ j, W_{ij} \succ 0\}$ غیرتهی بوده و نقاط S_i در یک راستا نباشند.

همچنین آنها نشان دادند که جواب بهینه EMFLP وجود دارد و در پوسته محدب ماشینهای موجود قرار دارد. سـایر محققیـن نیز مانند هانسن (۱۹۸۰) ، جول و لاو (۱۹۸۳) نیز وجود جواب بهینه در پوسته محدب ماشینهای موجود را تشریح نموده اند.

میهلـی (۱۹۵۸) اولیـن فـردی اسـت کـه براسـاس توسعه الگوریتم ویزفیلد راه حلی را برای مسئله EMFL ارایـه نمـود. اوسـترچ (۱۹۷۷) اثبات نمود که الگوریتم میهلی یک رفتار نزولی دارد. رادو (۱۹۸۸) تغییـر کوچکـی در الگوریـتم میهلـی ایجاد نموده و اثبات نمود که این الگوریتم همواره برای یک مسئله با ساختار مناسب که تابع هدف آن کاملا محدب باشد، به سمت جواب حداقل EMFL میل میکند. اگرچه روزن و اکسـو (۱۹۹۲) یـک مثالی را نشان دادند که الگوریتم میهلی برای یک مسئله با ساختار مناسب نیز به سمت جواب غیربهینه میل میکند.

موضـوع مهـم در مسـئله چـند ماشـین غیر قابل تجزیه بودن تابع هدف است. این نکته نه تنها در مواردیکه ماشین جدید و قدیم بر هم منطبق میشوند وجود دارد بلکه برای مواردیکه ماشینهای جدید نیز بر هـم منطـبق میشـوند وجـود دارد. بعلاوه ، چون تابع هدف کاملا محدب نیست، چندین حداقل کننده تابع هدف در مسئله منجر به این میشود که رفتار تکرار در مسئله گاهی به همگرایی متمایل گردد.

برای رفع مشکل غیرقابل تجزیه بودن تابع هدف در مسئله E MFL ، ایستر (۱۹۷۳) یک الگوریتم توسعه یافته ویزفیلد را استفاده نمود. در این روش، تابع هدف توسط یک تابع درجه دوم تخمین زده شد که تابعـی همـوار است. این روش بنام تخمین هیپربولید (HAP)[۵] نامگذاری گردید. که معمولترین روش برای حـل مسـائل چند ماشین با فاصله هندسی و یا خطی است. در ۱۹۷۷ ، اوسترچ نشان داد که HAP تحت شـرایط خـاص یـک الگوریـتم نزولـی اسـت. در ۱۹۸۵، چارالامـبوس روشـی را بـرای سرعت دادن به نرخ

---

[۵] Heperbolid Approximation Procedure

همگرایی HAP توسعه داد. اگرچه اثبات همگرا شدن HAP برای مسائل EMFL توسط اکسو (۱۹۹۱) و روزن ، اکسو (۱۹۹۳) اثبات گردید.

از آنجا که در برخی مسائل مکان یابی چند ماشین، جواب بهینه بر یکی از ماشینهای موجود منطبق میشود محققین شرایط لازم و کافی برای جواب بهینه را در جهت جلوگیری از مشکل عدم تجزیه شدن تابع هدف در چنین مواردی تعریف نموده اند. برای مسئله یک ماشین که سه ماشین موجود وجود داشته باشد، جول و لاو (۱۹۸۶) اثبات نمودند که به یک روش هندسی میتوان پاسخ بهینه را بدست آورد و نشان دانـد کـه کدام مکان ماشین موجود جواب بهینه است. برای مسئله چند ماشین که محدودیتی برای مکان ماشینهای جدید وجود نداشته باشد جول و لاو (۱۹۸۰) شرایطی را تعریف نمودند که جوابگوی وجود ماشینهای مجاز در یک حالت متقارن باشد. نتایج این تحقیق سپس توسط لوفوبر (۱۹۹۱) برای مسائلی کـه دارای محدودیت نیز باشند توسعه داده شد. اخیرا، مازولا و پساماسکو (۱۹۹٦) شرایط بهینه بودن در EMFLP را به عنوان قاعده ختم برای برخی الگوریتمهای محاسباتی مانند روش نیوتن ارایه شده توسط کالامایی و کوهن (۱۹۸۷) و برخی راه حلهای تحلیلی مسائل کوچک بکار بردند.

راه حلهـای دیگـری نیز برای این مسئله با بکارگیری اصول پایه برنامه ریزی محدب توسط لاو (۱۹٦۹) ، لاو و یونگ (۱۹۸۱) ، کاریزوسا (۱۹۹۳) ارایه شده است . این روشها بر این ایده استوارند که حد بالای تابع هدف در نقاط مرزی سطح محدب قرار داشته و مقدار گرادیان تعیین کننده حداکثر بهبود است. همچنین واندل و پیترسون (۱۹۸٤) حد پایین مسئله EMELP را از طریق مسئله جفت (دوآل) بدست آوردند.

مقالات زیادی با استفاده از روش دوآل برای حل مسئله پیشنهاد شده است که با وتیزکال (۱۹٦٤) و کوهن (۱۹٦۷) شروع شده است و سپس افراد دیگری مانند لاو (۱۹۷٤) ، وایت (۱۹۷٦) ، سینها (۱۹٦٦) ، فرانسیس و کـابوت (۱۹۷۲) ، اکسو (۱۹۹٦) از دریچه های مختلف به مسئله دوآل پرداخته اند. براساس ایـده دوآل، آنهـا رویـه هایـی را ارایـه نمودند که در آن یک تقریب بهینه برای EMFLP با حل متوالی روابط خطی بدست می آید و در هر مرحله از حل با الگوریتمهای نقاط داخل[٦] میتوان جواب مسئله دوآل را بدست آورد.

مسائل فاصله هندسی مربع[۷] :

[٦]Interior Point Algrithm

[۷]Squared – Euclidean Distance Problems

اگـر هزینه فاصله بین ماشین ـ مشتری را به نسبت توان دوم فاصله هندسی تعریف نماییم، مسئله را فاصـله هندسـی مـربع[۸] مـی خوانـیم. ایـن مسئله برحسب x و y قابل تفکیک است. ایستر و وایت (۱۹۷۳) کاربـردهای این نوع مسئله را تعریف نمودند. در این نوع مسئله، واضح است که تابع هدف کاملا محدب اسـت و بـرخلاف مسـئله فاصله هندسی، مشتق پیوسته درجه اول برحسب x و y دارد. بنابراین جواب بهینه بـرای حالـت یک ماشین و یا چند ماشین یکتا است و با تکنیکهای حساب دیفرانسیل قابل محاسبه است. در حالت چند ماشین نیاز هست که سیستم n معادله خطی، n متغییر را حل نماییم (فرانسیس ۱۹۹۲).

جـواب مسـئله فاصـله هندسـی مربع به عنوان یک نقطه شروع خوب برای مسئله EMFLP بکار گرفته میشود (فرانسیس ۱۹۹۲).

مکان یابی و مسئله تخصیص مکان در شبکه ها[۹] :

شـبکه G(N,A) که دارای n گره V_i و i =1, 2, …, n را در نظر بگیرید که برای هر یک تقاضـای $h_i i \in N$ وجـود داشـته و دارای ارتباط a_j و $j \in A$ بوده و دارای تقاضای یکنواخت با وزن w_j و j = 1 , 2 , …, n باشد.

فـرض کنـید کـه مکانهایـی که بایستی در G تعیین گردند دارای P ماشین بوده و به صورت زیر نمایش داده شوند :

$$X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_p\}$$

و فرض کنید :

$$d(v,x) = \min\{d(v,\chi_1), d(v,\chi_2), d(v,\chi_3), ...d(v,\chi_p)$$

نشاندهنده کوتاهترین فاصله بر روی G از هر نقطه V در G به مکان ماشین باشد.

مسئله میانه P[۱۰] :

---

[۸] Squared – Euclidean Distance Problems

[۹] Location and Location – Allocation Problems on Networks

[۱۰] P-Median Problem

مسئله میانه P ، تخصیص P ماشین جدید (که میانه خوانده میشوند) بر روی شبکه G است به نحویکه مجموع وزنی فواصل از هر گره به نزدیکترین ماشین را حداقل نماید. این مسئله را به صورت ریاضی به شکل زیر میتوان بیان نمود :

$$\underset{x on G}{Min}\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i d(v_i , x)$$

اگر $p \geq 2$ باشد درآنصورت این مسئله را به تخصیص مکان تبدیل میکند[۱۱] (LAP) . دلیل این تبدیل آنست که مکان ماشینهای جدید تعیین کننده تخصیص خدمات آنها به نحوی است که تقاضای گره ها به بهترین نحو برآورده شود. حکیمی (۱۹٦٤) اثبات نمود که در شبکه ها، مجموعه های مکانهای بهینه همواره بر کناره ها منطبق است. او یک روش شمارشی مبتنی بر تئوری گراف برای این مسئله پیشنهاد نمود. Revelle و Swain (۱۹۷۰) روشهای دیگری برای مسئله با فرموله نمودن مجدد آن به یک برنامه ریزی عدد صحیح پیشنهاد نمودند. Jarvinen (۱۹۷۲) همچنین از فرموله نمودن عدد صحیح و الگوریتم شاخه و تحدید برای این مسئله استفاده نمود.

به دلیل NP-Hard بودن مسئله ، راه حلهای ابتکاری زیادی توسعه یافته است که الگوریتمهای Maranzana (۱۹٦٤)، Teiz و Bart (۱۹٦۸) را میتوان نام برد. Beasly (۱۹۹۳) روشهای ابتکاری مبتنی بر لاگرانژ را برای مسئله میانه P ارایه داد که در آن از اصول بهینه یابی گرادیان استفاده نمود.

ویرایشهای دیگری از مسئله میانه P در ادبیات مربوطه معرفی شده اند. یک نوع مسئله که توسط Pesamosca (۱۹۹۱) مطالعه گردید، اثر متقابل وزنی بین ماشینهای جدید را به همراه ارتباطات درختی مورد تحلیل قرار داد. با این حالت مانند یک مسئله EMFLP بر روی یک درخت برخورد میشود.به این ترتیب براساس شرایط بهینه ای که برای P مسئله از نوع ESFL در نظر گرفته میشود، شرایط بهینه بودن مسئله اصلی تعیین میگردد.

به همین ترتیب برای حل مسئله EMFLP الگوریتم نقطه ثابت توسعه یافته و به صورت تکرارپذیر با بکارگیری الگوریتم مسئله ESFL حل شده و در صورتی که شرایط تفکیک پذیری وجود داشته باشد از الگوریتم Miehle استفاده میشود. نوع دیگری از این مسئله اعمال ظرفیت برای ماشینها است. در صورتیکه ظرفیت محدود باشد مسئله را با ظرفیت محدود و در غیر اینصورت مسئله بدون ظرفیت خوانده میشود[۱۲]. Cavalier و Sherali (۱۹۸٦) الگوریتم دقیقی را برای حل مسئله میانه P بر روی یک گراف زنجیری و مسئله میانه ۲ بر روی گراف درختی ارایه نمودند که در آن تابع تقاضا گسسته و یکنواخت فرض شده بود.

کارهای دیگری که در این زمینه انجام شده است از Mineka (۱۹۷۸) ، Mirchandani و Handler (۱۹۷۹)، Chili (۱۹۸۷) و Derardo (۱۹۸۲) میتوان نام برد.

---

[۱۱] Location – Allocation Problem

[۱۲] Capacitated Problem & Uncapacitated Problem

مسئله P مرکز[۱۳] :

هـدف ایـن نـوع مسـئله ، تعیین مکان P ماشین جدید که مرکز خوانده میشود بر روی گراف G اسـت بـه نحویکـه حداکـثر فاصـله وزنـی بین یک گره و نزدیکترین ماشین به آن حداقل شود و به صورت ریاضی :

$$\min_{X on G} f(x) = \max_{1 < i \le n} h_i d(v_i, x)$$

اگرچه این مسئله شبیه P میانه است اما روش حل آن کاملا متفاوت است. اولین روش حل توسط حکیمـی (۱۹٦٤) برای P=1 پیشنهاد گردید که در آن یک مرکز بین هررابطه تعیین گردیده و سپس مکان بهینه در کل یافته میشد. روشی بهتر و کارا تر توسط Christofides (۱۹۷۵) پیشنهاد گردید که نشان داد لازم اسـت تـا فقـط زیـر مجموعه ای از ارتباطات تعیین شود و این زیر مجموعه برای یافتن جواب بهینه کافـی اسـت. Erxut (۱۹۹۲) یک الگوریتم جستجو با زمان حل دو جمله ای برای حل مسئله P مرکز با محدودیت فاصله ارایه نمود.

راه حلهـای بیشـتری پیشـنهاد شـده اسـت کـه از جملـه Christofides و Viola (۱۹۷۱) ، Granfinkel (۱۹۷۷) و Singer (۱۹٦۸) میتوان نام برد.

مسئله تخصیص مکان پیوسته با تقاضای گسسته[۱٤] :

مسئله تخصیص مکان پیوسته در مورد تعیین مکان n مرکز در یک سطح برای ارایه خدمت به m مشتری با موقعیت از پیش معین شده وهمچنین تعیین میزان جریان از هر مرکز عرضه است به نحویکه جمع هزینه توزیع حداقل شود. رابطه ریاضی این مسئله عبارتست از :

LAP
$$\min \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} w_{ij} d(x_i, p_j)$$

S.T.

$$\sum_{j=1}^{w} w_{ij} = s_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_{ij} = d_j \qquad j = 1,2,\ldots,m$$

$$w_{ij} \ge 0 \qquad j = 1,2,\ldots,m \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

---

[۱۳] P-Center Problem

[۱٤] Continuos Location – Allocation Problem with Discrete Demand Points

که در آن :

m : تعداد مشتریان

n : تعداد مراکز عرضه

W_{ij} : مقدار جریان از مرکز عرضه i به مشتری j

$(x_i, y_i) = X_i$: مکان مرکز عرضه i

$(a_i, b_j) = p_j$: مکان مشتری j

$d(X_i, p_j)$: فاصله بین مرکز عرضه i و مشتری j

s_i : ظرفیت سالیانه مرکز عرضه i

d_j : تقاضای سالیانه مشتری j

c_{ij} : هزینه یک واحد جریان در واحد مسافت برای مرکز عرضه i به مشتری j

X_{ij} : متغیر تصمیم گیری مکان

w_{ij} : متغیر تصمیم گیری مقدار جریان

برای حالتیکه مکان w_{ij} ثابت باشد مسئله به حالت مسئله مکان یابی تبدیل میشود و در صورتیکه مکان x_i ثابت باشد مسئله به یک مسئله حمل و نقل معمول تبدیل میشود.

در مورد مسئله مکان یابی که به دلیل ثابت بودن w حاصل میشود، معیار فاصله یا جریمه را میتوان هندسی، خطی و یا مربع هندسی ارزیابی نمود. مدل ریاضی LAP طرح شده، یک مدل با ظرفیت محدود است که در آن محدودیت s_i برای هر مرکز عرضه وجود دارد. در صورتیکه برای تمام مراکز عرضه $s_i = \infty$ باشد در آنصورت مسئله به یک LAP با ظرفیت نامحدود تبدیل میشود که هر عمل دریافت خدمت بوسیله مرکز عرضه نزدیکتر به آن سرویس داده میشود.

مسئله تخصیص مکان گسسته با هزینه ثابت مکان[۱۵] :

این حالت یکی از انواع LAP است که محل n مرکز عرضه بایستی در n محل از پیش تعیین شده قرار گیرد(Davis وRay ،۱۹٦۹). هزینه ثابت در این نوع مسئله ، هزینه ایجاد یک مرکز عرضه در مکان مشخص است (Ellwein و Gray ،۱۹۷۱). ویرایش بدون محدودیت ظرفیت این مسئله توجه زیادی

[۱۵] Fixed Location / Discrete Location – Allocation Problems

را بـه خـود اختصـاص داده است و افرادی مانند Kuehn و Hamburger (۱۹٦۳)، Manne (۱۹٦٤) ، Feldman (۱۹٦٦) روشـهای ابـتکاری خوبـی را پیشـنهاد داده انـد. الگوریتم شاخه و تحدید نیز توسط Ray و Effroymson (۱۹٦٦) بـرای حـل مسـئله با ظرفیت محدود ارایه شده است. این مسئله به صورت بـرنامه ریـزی عـدد صـحیح مدل شده و زیرمسئله هایی که در یک محدوده خاص قابل بهینه شدن هستند تعریف شدند. الگوریتم دوگان نیز توسط Erlenkotter (۱۹۷۸) برای حل مسئله ارایه گردید.

ویـرایش بـا محدودیت ظرفیت این مسئله توسط محققین که بر روی جوابهای دقیق و یا ابتکاری کـار مـیکرده انـد، بررسی شده است. Sa (۱۹٦۹) اولین الگوریتم دقیق را براساس مدل برنامه ریزی خطی ارایـه داد و سـپس توسـط Davis و Ray (۱۹٦۹) توسـعه یافـت. Beasly (۱۹۹۳) یـک روش ابتکاری براسـاس بهیـنه سازی مبتنی بر روش گرادیان و لاگرانژ ارایه داد. همچنین توسط Khumawala (۱۹۷٤) روشهای تخمین مبتنی بر مسئله حمل و نقل ارایه داده شد.

مسئله تخصیص مکان تصادفی[١٦] :

ویرایشـهای مختلفـی از مسـئله تخصـیص مکان تصادفی در ادبیات مسئله عرضه شده است. یک ویـرایش آن کـه توسط Marucheck و Aly (۱۹۸۱) ارایه شده است براساس فواصل خطی در یک مدل بـدون محدودیـت ظرفیـت ، دارای تقاضای با تابع چگالی احتمالی نرمال و یکنواخت در محدوده های مربعـی طـرح گـردید. آنها الگوریتم شاخه و تحدید را برای حداقل نمودن مقدار مورد انتظار[١٧] برای تابع هدف فاصله وزنی ارایه نمودند.

یک ویرایش دیگر مسئله، فاصله هندسی تصادفی است که توسط Selim (۱۹۷۹) ارایه گردید. در این مسئله تقاضای مشتریان متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع آماری مشخص معرفی شدند.

بـرای ایـن مسئله ، یک مدل مشابه معین[١٨] با اعمال محدودیتهای احتمالی تعریف شده و مدل به صـورت دو مـرحله ای طراحی گردید. بر این اساس، یک الگوریتم سطوح برشی برای حل مسائل پیشنهاد شده است .

مسئله تخصیص مکان بر روی یک سطح مقصد[١٩] :

برخی از مسائل واقعی وجود دارد که تقاضا به جای نقاط گسسته بر روی یک سطح توزیع شده اسـت. لـذا ، برخـی محققین این حالت را مدل نمودند. Leamer (۱۹٦۸) اولین فردی بود که یک مسئله

---

[١٦] Stochastic Location – Allocation Problem

[١٧] Minimum Expected value

[١٨] Deterministic

[١٩] Location – Allocation Problems with area Destination

چـند ماشین بدون محدودیت ظرفیت و بر روی سطح مقصد را طراحی نمود. او در این مسئله فاصله را به صـورت هندسـی تعـریف نمـوده و تقاضا بر روی سطح مربع، دایره یا مثلث معادل آن توزیع شده بود. او سـپس یـک روش ابـتکاری بـرای حـل مسئله ارایه داد که با جابجایی انفرادی هر یک از ماشینها جواب بهـبود نمی یافت. بعلاوه ، وی نتایجی بدست آورد که در آن با افزایش تعداد ماشینها، سطح خدمت ارائه شـده توسط هر ماشین متمایل به یک چند ضلعی میشود. Cavalier و Sherali (۱۹۸٦) الگوریتم لومر را بهبود داده و جوابهای قطعی برای چندین مسئله بدست آوردند.

مسئله تخصیص مکان پویا و متوالی[۲۰] :

در برخـی از مسـائل زمـان نقـش مهمـی را در مسئله تخصیص بازی میکند. برای تحلیل اینگونه مسـائل، زمـان را میـتوان بـه چندیـن دوره تقسـیم نمود و هر یک را به صورت مسئله ای متفاوت در نظر گرفت اما به دلیل مسائل اقتصادی و مالی، ایجاد طرح جدید مستلزم تغییر طرح قدیم است که عملی بودن این روش را دشوار میکند.

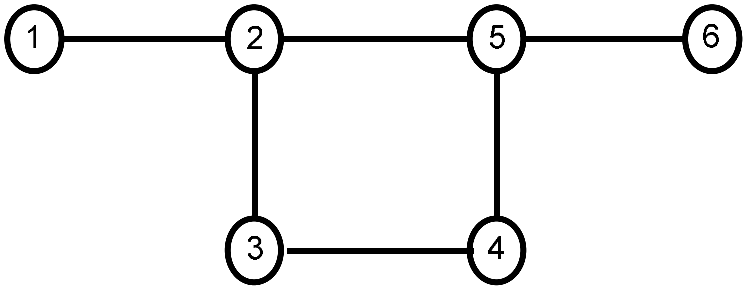
Scatt (۱۹۷۱) یـک LAP با فاصله هندسی و بدون محدودیت ظرفیت را حل نمود که در آن هر ماشـین در هـر دوره زمانی بایستی به مکانی تخصیص یابد. او دو نوع استراتژی برای این مسئله ارایه داد. در اسـتراتژی اول، هـر ماشـین جدیـد به مکانی تخصیص می یابد که هزینه همان دوره حداقل شود و در استراتژی دوم که یک برنامه بلندمدت را پشتیبانی میکند محل ماشین جدید براساس یک جواب بهینه چند ماشـین بدسـت مـی آیـد کـه در آن توالـی تخصیص ماشین به مکانها براساس دوره های مختلف بایستی تصمیم گیری شود.

در یـک ویـرایش دیگر مسئله ، تخصیص مجدد ماشین به یک مکان به وضعیت ماشین جدید قبلی مسـتقر در آن محل ارتباط دارد. همچنین در حالتهای دیگری از مسئله Sherali (۱۹۹۱) به دلیل تقاضای احتمالـی، یا معین لازم است که یک ماشین جدید به یکی از مکانهای مشخص اضافه گردد تا تقاضا به نحـو بهیـنه پاسخ داده شود. یک مسئله پویا ی تخصیص مکان که اثر زمان در آن به صورت پیوسته وجود دارد توسط Tapiro (۱۹۷۱) و Rao و Rutenberg (۱۹۷۷) در ادبیات این مسئله ارایه شده است.

[۲۰] Sequential and Dynamic Location – Allocation Problems

کاربرد گراف درمسائل مکان یابی

مسئله مکـان یابـی کـه از گراف استفاده بعمل آید به مفهوم مسائلی است که محل قرار گرفتن ماشین بر روی گراف (یعنی بر روی کناره (Edge) و یا گره (Vertex)) قرار دارد.
مـثالهای کاربـردی بـرای این نوع مسائل را میتوان در مسئله تعیین ایستگاه آتش نشانی ملاحظه نمـود که در آن ایستگاه بر روی یکی از شاهراههای اصلی (کناره) در یک مجموعه از مناطق (گره) قرار میگیرد. (1978 , Minieka) .



بـرای اینگونه مسائل تابع هدفهای مختلفی تعریف شده است. Minieka (۱۹۷۸) حداقل نمودن حداکـثر فاصـله را بـرای کاربـرد تعیـین مکان آتش نشانی طرح نمود که به مسئله تعیین مرکز (Center) معروف است و تابع هدف حداقل نمودن مجموع فاصله ها را برای کاربرد تعیین مرکز پست تحت عنوان میانه (Medium) طرح نمود.

مسئله مرکز ***Center Problem***

طـبق تعـریف یـک مرکـز، گره ای مانند X است که دورترین گره از x تا حد ممکن نزدیکترین گره موجود باشد و یا MVV(x)[21] کمترین مقدار خود را داشته باشد.
بـرای این مسئله، ابتدا روش Floyd و یا الگوریتم Dantzig استفاده میشود. با این الگوریتمها میـتوان ماتـریس فاصله D از هر گره تا گره دیگر و طول کوتاهنرین مسیر از گره i به گره j را محاسبه نمود. به همین ترتیب واضح است که حداکثر فاصله MVV(i) – فاصله هر گره از گره i – برابر بیشترین مقدار در سطر i ام ماتریس D است.
بـه عـبارت دیگر یک مرکز، گره ای است که در سطر مربوط به آن بزرگترین مقدار در آن سطر، کوچکتر از بزرگترین مقدار سطرهای دیگر باشد.

ترکیب الگوریتم **Floyd** (تعیین کوتاهترین مسیر) و الگوریتم تعیین مرکز

---

[۲۱] MVV(x) : حداکثر فاصله از هر گره تا گره x است یا $MVV(x) = \max_j \{d(x,j)\}$

گام اول : گره های گراف را به ترتیب 1,2,3.....,N نامگذاری کنید. ماتریس فاصله D را که عنصر i-j ام آن برابر طول کوتاهترین فاصله از گره i به گره j است را تعریف نمایید.

اگـر کناره ای بین گره i و j وجود نداشته باشد $d^{\circ}_{ii} = 0$ است و فاصله هر گره از خودش را صفر فرض کنید $d^{\circ}_{ii} = 0$.

گـام دوم : بـرای m=1,2,3,....,N بـه صـورت متوالی عناصر ماتریس D^m را از ماتریس D^{m-1} بدینصورت محاسبه میکنیم :

$$d^m_{ij} = \min\{d^{m-1}_{im} + d^{m-1}_{mj}, d^{m-1}_{ij}\}$$

توجـه : در محاسـبات ماتـریس ، عناصـر قطـر نیازی به محاسبه ندارد وهمچنین در هر ماتریس D^m ، سطر m و ستون m نیاز به محاسبه ندارد.

گـام سـوم : بـرای ماتـریس کوتاهتریـن فاصـله مقدار MVV(i) را برای تمام سطرها محاسبه نمایید.

MVV(i)=max{d(i,j)}={حداکثر مقدار در هر سطر}

گام چهارم : کمترین مقدار MVV(i) را معین نمایید. گره i ام متناظر با کوچکترین MVV(i) ، مرکز گراف است.

مرکز عمومی ***Genral Center***

مرکـز عمومـی، گـره x اسـت کـه کمتریـن مقـدار MVA(x)[22] را دارا باشد. به عبارت دیگر دورترین نقطه از گره x تا حد ممکن به آن نزدیک باشد.

عبارت MVA(x) در این تعبیر عبارت است از :

$$MVA = \max d'(j,(k,s))$$

که در آن برای کناره های بدون جهت رابطه زیر صادق است.

$$d'(j,(r,s)) = \frac{d(j,r) + d(j,s) + a(r,s)}{2}$$

و برای کناره های جهت دار از رابطه زیر استفاده میشود.

$$d'(j,(r,s)) = d(j,r) + a(r,s)$$

و علائم بکار گرفته شده در روابط بشرح زیر هستند :

j : گره شماره j

a(r,s) : مقدار کناره (r,s)

[22] Maximum Vertex _ Arc

$d(j,s), d(j,r)$: مقدار فاصله از گره j تا r (یا s)

الگوریتم مرکز عمومی :

گـام یـک : گـره هـا را از شماره 1,2,…,n و کناره ها را نیز از شماره 1,2,…,m شماره گذاری نمایید.

گام دوم : ماتریس d' را تعریف نمایید که سطر آن گره ها و ستون آن کناره ها باشد. مقدار عناصر ماتریس را براساس روابط مربوط به VA محاسبه نمایید.

گام سوم : مقدار MVA(x) را برای کلیه سطرها (گره ها) محاسبه نمایید. کوچکترین MVA ، مرکز عمومی گراف است.

مرکز مطلق Absolute Center

مرکـز مطلـق، هـر نقطه ای است که دورترین گره از آن تا حد امکان به آن نزدیک باشد. برای یافتن مرکز مطلق، بایستی نقطه f-(r,s) را به نحوی پیدا کرد که :

[23]

$$MPV(f\text{-}(r,s)) = \min_{f-(t,u)\in p} MPV(f\text{-}(t,u))$$

که در آن :

$$PV = d(f\text{-}(r,s),j)$$

$= \min \{ f\, a(r,s) + d(r,j),\ (1-f)\, a(r,s) + d(s,j)\}$: برای کناره بدون جهت

$= (1-f)\, a(r,s) + d(s,j)$: برای کناره جهت دار

یافتن مرکز مطلق مسئله بسیار پیچیده تری نسبت به تعیین مرکز یا مرکز عمومی است زیرا بایستی نه تنها گره ها بلکه تمام نقاط را مورد بررسی قرار داد.

نکـته : هـیج نقطـه میانـی برای کناره جهت دار در مسئله مرکز مطلق وجود ندارد. زیرا در یک کـناره جهـت دار کـه دارای یـک جهـت اسـت نقطه نهایی کناره جهت دار(یا گره) نزدیکترین نقطه به مقصد است. بنابراین برای نقطه میانی فقط لازمست که کناره های بدون جهت را بررسی نماییم.

متاسـفانه ایـن روش نیازمـند رسـم نقـاط تا گره ها است و راهی برای عدم رسم فواصل وجود ندارد. این روش توسط حکیمی (١٩٦٤) ارایه شده است.

الگوریتم مرکز مطلق :

گام اول : تمام کناره های (r,s) بدون جهت را در نظر بگیرید. فاصله از نقطه f بر روی (r,s) به گره j را با استفاده از رابطه PV تعریف نمایید.

---

[٢٣] PV : Point – Vertex Distance

گـام دوم : تابع فاصله را برای کلیه گره ها (j) برحسب f رسم نمایید. و مقدار f را در بازه صفر و یک در نظر بگیرید. $0 \le f \le 1$

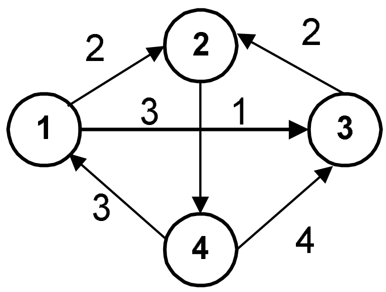
محور مختصات x ها را برای f و محور مختصات y را برای d(f-(r,s),j) در نظر بگیرید.

گـام سـوم : مقـدار f^* را که حداقل تقاطع بزرگترین تابع ها در آن منطقه است را مشخص نمایید

مرکز مطلق یک کاندید $f^* - (r,s)^*$ است که حداقل فاصله به دورترین نقطه را داشته باشد

$$\max\{d(f^* - (r,s)^*, j)\} = \min\{\max d(f^* - (t,u), j)\}$$

<u>*مثال :*</u>



بـرای این مثال، تعیین نقطه مرکز مطلق لازمست که کناره های (1,4) ، (2,3) و (3,4) را مطابق الگوریتم مورد بررسی قرار دهیم.

$$d(f-(3,4),1)=\min\{f\,a(3,4) + d(3,1) + (1-f)\,a(3,4) + d(4,1)\}$$
$$= \min\{4f + 6 ,\ 4(1-f) + 3\}$$
$$= \{4f + 6 \quad \text{برای} \quad f \le \frac{1}{8}$$
$$\{7 - 4f \quad \text{برای} \quad f \ge \frac{1}{8}$$

$$d(f-(3,4),2)=\min\{f\,a(3,4) + d(3,2) + (1-f)\,a(3,4) + d(4,2)\}$$
$$= \min\{4f + 2 ,\ 4(1-f) + 5\}$$
$$=\{4f + 2 \quad \text{برای} \quad f \le \frac{7}{8}$$
$$\{9 - 4f \quad \text{برای} \quad f \ge \frac{7}{8}$$

$$d(f-(3,4),3)=\min\{f\,a(3,4) + d(3,3) + (1-f)\,a(3,4) + d(4,3)\}$$
$$= \min\{4f ,\ 4(1-f) + 4\}= 4f$$

$$d(f-(3,4),4)=\min\{4f + 3,\ 4(1-f) + 0\}$$
$$=\{4f + 3 \quad \text{برای} \quad f \le \frac{1}{8}$$

$\{4 - 4\text{f}$ برای $f \geq \frac{1}{8}$

با رسم نمودارها مشخص میشود که حداقل مقدار برای بزرگترین تابع (توابع) [۲۴] برای گره های یک و دو صورت میگیرد.

$$\text{d(f-(3,4),1)=d(f-(3,4),2)}$$
$$7 - 4f^* = 4f^* + 2,\ f^* = \frac{5}{8}$$
$$d(\frac{5}{8} - (3,4),1) = d(\frac{5}{8} - (3,4),2) = 4\frac{1}{2}$$

با انجام عملیات برای دو کناره دیگر مشخص میشود که f^* برای آنها در نقطه صفر اتفاق می افتد که معادل گره ۱ است.

General Absolute Center *مرکز عمومی مطلق*

در این مسئله مرکز عمومی مطلق نقطه x است که دورترین نقطه از x تا حدامکان به آن نزدیک باشد. برای یافتن نقطه x بایستی نقطه ای را پیدا کرد که

$$\text{MPA(f-(r,s)} = \min_{f-(t,u)\in p} \text{MPA(f-(t,u))}$$

حل این نوع مسئله شبیه مسئله مرکز مطلق است با این تفاوت که فاصله یک نقطه f بر روی یک کناره با کناره (r,s) محاسبه میگردد در صورتیکه در مرکز مطلق فاصله کناره و گره محاسبه میگردد. در رابطه فوق PA[25] عبارتست از :

$$PA = d'(f-(r,s),(t,u))$$

<u>*نکته :*</u> هیچ نقطه میانی بر روی کناره جهت دار وجود ندارد که مرکز عمومی مطلق باشد.

تجربه مسائل واقعی نشان داده است که دورترین نقطه از نقطه f بر روی کناره (r,s) بر روی کناره (r,s) قرار نمیگیرد. لذا میتوان $d'(f-(r,s),(r,s))$ را حذف نمود. بدین ترتیب همان روش حل مسئله مرکز مطلق را میتوان برای این مسائل بکار برد و تنها تفاوت آنست که تابع گره ـ نقطه[۲۶] به تابع کناره ـ نقطه[۲۷] تبدیل میشود.

[۲۴] منظور از بزرگترین تابع : تابعی است که مقادیر آنها پس از رسم منحنی ، بالای تمام خطوط رسم شده از سایر توابع قرار می گیرد.

[۲۵] Point – arc Distance

[۲۶] Point - Vertex

[۲۷] Point - arc

Medion Problem *مسئله میانه*

میانه، هر گره x است که کوتاهترین مجموع فاصله از x به کلیه گره ها را داشته باشد. لذا یک میانه x ، گره ای است که :

$$SVV^{28}(x) = \min\{SVV(i)\}$$

و

$$SVV(i) = \sum_{j}^{i} d(i,j)$$

الگوریتم :

گام یک : ماتریس فاصله گره تا گره را تشکیل میدهیم. (ماتریس D)

گام دوم : جمع فواصل از گره i به سایر گره ها یا SVV(i) را محاسبه میکنیم. بنابراین طبق تعریف میانه سطر D ام ماتریس را میانه ارزیابی می کنیم در صورتیکه کوچکترین مجموع را داشته باشد.

مثال : برای گراف مثال قبل داریم :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad SVV = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$SVV(x) = \min\{8,7,11,12\} = 7, ---> x^* = 2$$

General Median *میانه عمومی*

یک میانه عمومی، گره x است که کوچکترین مجموع فاصله تا هر کناره را داشته باشد و یا

$$SVA(x) = \min_i\{SVA(i)\}$$

الگوریتم :

گام یک : ماتریس فاصله گره ـ کناره D' را تشکیل میدهیم.

گام دوم : مجموع فاصله از گره i به کلیه کناره ها یا SVA(i) را محاسبه نمایید. گره متناظر با کوچکترین SVA ، میانه عمومی است.

---

۲۸ VV= Vertex – Vertex Distance

Absolute Median *میانه مطلق*

میانه مطلق نقطه ای است که مجموع فواصل آن به کلیه گره ها تا حد ممکن کوچک باشد. قضیه ای در این زمینه وجود دارد که "همواره گره ای وجود دارد که میانه مطلق است". (Mineaka ۱۹۷۸).

با توجه به قضیه فوق، برای میانه مطلق فقط لازم است به گره ها توجه شود. بنابراین الگوریتم مسئله میانه برای این گونه مسائل نیز کاربرد دارد.

General Absolute Median *میانه مطلق عمومی*

این مسئله برای طراحی مواردی است که در آن یک نقطه ای وجود دارد که مجموع فاصله از آن نقطه به کلیه کناره ها تا حد ممکن کوچک باشد. بنابراین اینگونه مسائل را میتوان به صورت زیر فرموله نمود :

$$SPA^{29}(f\text{-}(r,s)) = \min_{f-(t,u)\in p} \{SPA(f\text{-}(t,u))\}$$

<u>*قضیه :*</u> هیچ نقطه ای میانی بر روی یک کناره جهت دار وجود ندارد که بتواند "میانه مطلق عمومی" باشد.

<u>*قضیه :*</u> هیچ نقطه میانی بر روی یک کناره بدون جهت (r,s) وجود ندارد که بتواند "میانه مطلق عمومی" باشد در صورتیکه رابطه زیر صادق باشد[۳۰] :

$$\left|SVA(r) - SVA(s)\right| \succ \frac{1}{2}[d(r,s) + d(s,r)]$$

لم : برای هر نقطه میانی f بر روی کناره (r,s) داریم :

$$SPA(f-(r,s)) \geq SVA(r) - \frac{1}{2}d(r,s)$$

$$SPA(f-(r,s)) \geq SVA(s) - \frac{1}{2}d(r,s)$$

<u>*الگوریتم :*</u>

گام اول : ماتریس D فاصله گره - گره (vv) را با الگوریتم فلوید یا دانتزیک تشکیل دهید.

گام دوم : ماتریس D' فاصله گره - کناره (VA) را محاسبه نمایید. با محاسبه SVA(i) برای کلیه گره ها، کوچکترین مقدار را انتخاب و بقیه را حذف نمایید. مقادیر انتخاب شده کاندید برای مقدار پاسخ هستند.

---

[۲۹] PA : Point – arc Distance

[۳۰] Minieka Optimization Algorithms for Networice and Braphs , 1978

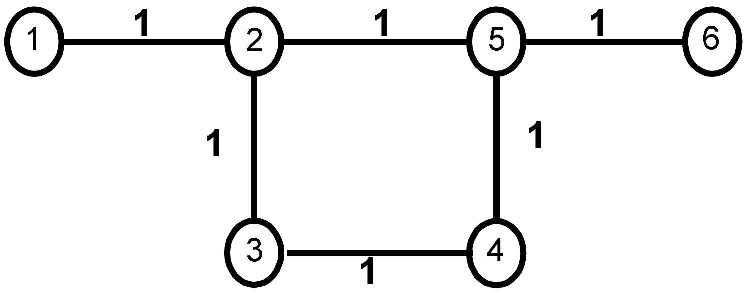
گـام سـوم : بـرای کناره های بدون جهت براساس رابطه تعریف شده در قضیه، شرط برای هر کناره محاسبه میشود. کناره هایی که شرط را راضی نمیکنند حذف میشوند.

گـام چهـارم : بـرای کـناره هـای باقیمانده که حذف نشده اند رابطه "لم" را محاسبه میکنیم. کناره هایی که این رابطه بری آنها صدق نمیکند حذف میشوند.

گـام پنجم : برای کناره های باقیمانده توابع فاصله از هر نقطه میانی تا کناره PA را محاسبه و نمودارهای مربوطه را رسم کنید و حداقل برای بزرگترین تابع را محاسبه نمایید. با تعیین نقطه f و کناره مربوط به آن، کاندید جواب بهینه مشخص میشود.

گام ششم : مقدار مجموع فاصله از گره کاندید و مقدار مجموع فاصله از نقطه میانی (بر روی کـناره) کـاندید شـده با هـم مقایسه و کمترین مقدار جواب بهینه مسئله است و نقطه مربوطه، میانه مطلق عمومی است.

مثال : برای گراف زیر نقطه میانه مطلق عمومی را پیدا کنید :



گام ۱ : ماتریس فاصله D عبارتست از :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

گام ۲ : اگر کناره ها را به صورت زیر شماره گذاری کنیم :

1 : (1,2) , 2 : (2,3) , 3 : (3,4) , 4 : (4,5) , 5 : (5,6) , 6 : (2,5)

ماتریس D' برابر خواهد بود با :

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

بنابراین :

SVA(1) = 1 + 2 + 3 + 3+ 3 + 2 = 14
SVA (2) = 1 +1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9
SVA(3) =11 ,   SVA(4) = 9   SVA(5) = 11 , SVA(6)=19

گره های 2 و 5 با مقدار 9 کاندید میشوند.

گام ۳ : محاسبه شرایط قضیه را برای تمام کناره ها انجام میدهیم :

a(1,2)

$$|SVA(1)-SVA(2)| = |14-9| = 5 \succ 1 = d(1,2)$$

لذا کناره (1,2) حذف میشود.

$$|SVA(2)-SVA(3)| = |9-11| = 2 \succ 1 = d(2,3)$$

کناره (2,3) حذف میشود.

$$|SVA(3)-SVA(4)| = |11-11| = 0 \prec 1 = d(3,4)$$

کناره (3,4) حذف نمیشود.

$$|SVA(4)-SVA(5)| = |11-9| = 2 \succ 1 = d(4,5)$$

کناره (4,5) حذف میشود.

$$|SVA(5)-SVA(6)| = |9-14| = 5 \succ 1 = d(5,6)$$

کناره (5,6) حذف میشود.

$$|SVA(2)-SVA(5)| = |0-0| = 0 \prec 1 = d(2,5)$$

کناره (2,5) حذف نمیشود.

گام ٤ : رابطه لم را برای کناره های باقیمانده بکار میبریم.

$$SPA(f-(3,4)) \ge SVA(3) - \frac{1}{2}d(3,4) = 11 - \frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$$

چون مقدار $10\frac{1}{2}$ از مقدار گره کاندید در گام دوم بیشتر است لذا کناره (3,4) حذف میشود.

$$SPA(f-(2,5)) \ge SPA(2) - \frac{1}{2}d(2,5) = 9 - \frac{1}{2} \prec 9$$

$$SPA(f-(2,5)) \ge SPA(5) - \frac{1}{2}d(5,2) = 9 - \frac{1}{2} \prec 9$$

بنابراین کناره (2,5) حذف نمیشود.

گام ٥ : محاسبه PA را برای کناره باقیمانده انجام میدهیم.

$$d'(f-(2,5),(1,2)) = 1 + f = \min(f(1)+1, (1-f)(1)+2)$$

$$d'(f-(2,5),(2,3) = 1 + f$$

$$d'(f-(2,5),(3,4) = 2$$

$$d^{'}(f-(2,5),(4,5)=1+(1-f)$$
$$d^{'}(f-(2,5),(5,6)=1+(1+f)$$
$$d^{'}(f-(2,5),(2,5)=\max(f,(1-f))$$
$$SPA(f-(2,5)) = (1 + f) + (1 + f) + 2 + (2 - f) + (2 - f) + \max\{f, (1-f)\}$$
$$= 8 + \max\{f, (1 - f)\}$$

از آنجا که $\min[\max\{f , (1,f)\}]$ در $f=\frac{1}{2}$
$$0 \le f \le 1$$
صورت میگیرد بنابراین : $SPA(\frac{1}{2}-(2,5))=8\frac{1}{2}$

گام ٦ : با مقایسه مجموع فاصله برای کاندید گره و کاندید مقدار میانی کناره مشخص میشود که نقطه $\frac{1}{2}$ بر روی کناره (2,5) جواب بهینه است.

زیرگراف مسطح و مسئله طراحی استقرار ماشین آلات :

تعییـن مکان تعدادی از ماشین آلات به نحویکه تابع هدف هزینه / فاصله / سود را بهینه نماید را میتوان به صورت یک گراف که کناره های آن مقادیر هزینه / فاصله / سود مجاور بودن هر دو ماشین را بیان کند مدل نمود. در چنین حالتهایی که مسئله به صورت یک گراف مدل شده است بنام گراف با کناره های وزن داده شده معروف است[٣١].

فرضیه ای که در چنین مسئله ای وجود دارد. داشتن داده در مورد هزینه (فاصله / سود) مجاورت دو ماشین در کنار هم است. بدین ترتیب ماشینها گره های گراف را تشکیل داده و کناره ها مقدار هزینه مجاورت دو ماشین هستند. بنابراین حل چنین مسئله ای، یافتن طرح استقراری است که هزینه (سود) کل را حداقل (حداکثر) نماید و این پاسخ با ایجاد یک زیرگراف حداکثر مسطح[٣٢] حاصل میشود.

مدل تئوریک گراف استقرار ماشین آلات :

فرض کنید که گراف G = (V,E) یک گراف ساده باشد که گره های آن V و کناره های آن E باشد. طبق تعریف گرافی مسطح است که بتوان آن را بر روی سطح به نحوی رسم نمود که کناره ها یکدیگر را فقط در گره ها قطع نمایند. و یک گراف حداکثر مسطح، گراف مسطحی است که اضافه نمودن یک کناره بین هر دو گره غیرمجاور منجر به غیرمسطح شدن گراف شود. (Bondy , Murty , 1977)

---

[٣١] Edge Weighted Graph

[٣٢] Maximal Planner SubGraph

مسئله استقرار ماشین را بر روی یک گراف وزن داده شده G ، یافتن یک زیرگراف حداکثر گسترده موزن[۳۳] G' است که مسطح باشد و یا :

$$\max B(G) = \sum_{(i,j)\in E'} w_{ij} x_{ij}$$

ST :

$x_{ij} = 0,1$ برای کلیه j و i ،

$E' = \{(i,j), x_{ij} = 1\}$ و $G' = (V, E')$ و گراف مسطح باشد.

برای حل این مسئله، تعدادی روشهای ابتکاری ایجاد کننده ارایه شده است که یک گراف حداکثر و مسطح را پیشنهاد میکنند. معمولا این روشهای ابتکاری با یک K_3 یا K_4 شروع کرده و با اضافه نمودن گره های جدید با حفظ مسطح بودن گراف عمل میکنند. فایده اینگونه روشها آنست که نیازی به کنترل مسطح بودن گراف در هر مرحله نیست. با پیدا نمودن گراف نهایی، میتوان به سرعت گراف را به طرح استقرار بلوک ماشین آلات تبدیل نمود.

راه حلهای ابتکاری مسئله گراف گسترده حداکثر و مسطح

اولین کاربرد تئوری گراف برای مسئله طراحی استقرار توسط Flouds و Robinson (۱۹۷٦) با انتشار روش Deltahedron بوجود آمد. روش کار بدینصورت است که با یک K_4 شروع نموده و گره ها یکی ـ یکی اضافه میشوند و معیار هدف اندازه گیری میشود.

در هر مرحله حداکثر سود ناشی از گره های استفاده نشده محاسبه میشود و گره ای که بیشترین فایده را ایجاد میکند انتخاب شده و به زیرگراف اضافه میشود. اولین K_4 با انتخاب چهار گره که بیشترین وزن را دارند انجام میشود[۳٤] (S-Contruction) و یا کلیه K_4 ها ایجاد شده و بهترین آنها انتخاب میشود (R-Contruction) . الگوریتم با بکارگیری روش ایجادی S از درجه $O(n^2)$ است.

الگوریتم Al-Hakim (۱۹۸٥) بیشتر الگوریتم دلتا هیدرون است و تنها تفاوت آن در شروع است که به جای K_4 با K_3 شروع میکند. الگوریتم از درجه $O(n^3)$ است. الگوریتم دیگری توسط Leung (۱۹۹۲) عرضه شد که تفاوت با آن الگوریتم دلتا هیدروژن در اضافه نمودن گره ها است. در این روش یک گره و یا سه گره به صورت همزمان اضافه میشوند. اضافه نمودن سه گره به معنای ارزیابی 9 کناره جدید است و ارزش این اضافه نمودن با تقسیم نمودن ارزش کل بر 9 تعیین میشود. این روش معمولا جواب بهتری بدست میدهد ولی زمان پردازش از درجه $O(n^5)$ است.

---

[۳۳] Maximum Weighted. Spanning SubGraph

[۳٤] وزن یک گره ، جمع وزنی کناره های مرتبط با آن است.

الگوریتم بسط چرخ[35] که توسط Eades (۱۹۸۲) عرضه شد با یک K_4 شروع میکند که از طریق انتخاب بزرگترین وزن کناره و سپس اضافه نمودن گره های بعدی بدست آمده است. این الگوریتم با یک چرخ شامل n گره که به صورت یک چرخه از n-1 گره است تعریف میشود به نحویکه هر گره مجاور یک گره دیگر مازاد است.

فرض کنید w یک چرخ باشد که دارای یک مرکز x است. دو گره K و L را انتخاب کنید که در چرخه باشد. گره y از مجموعه گره های استفاده نشده به این چرخه متصل میشود به نحویکه y مرکز چرخه جدید w است که شامل K و L بوده و x بخشی از چرخه آن است و کلیه اعضاء چرخه های w مجاور به گره x و گره y هستند. با اضافه نمودن هر گره استفاده نشده به روش فوق، زیرگراف مسطح حداکثر بدست میآید. پیچیدگی این الگوریتم $O(n^4)$ است.

الگوریتم ***Kim - Kim***

این الگوریتم ویرایشی از الگوریتم Leung است. در این روش به جای اضافه نمودن یک یا سه گره در هر مرحله، همواره سه گره اضافه میشود مگر آنکه فقط دو یا یک گره باقیمانده باشد. این فرآیند بدین منظور طراحی شده است که از اثر چتری[36] در مواردیکه یک گره مجاور کلیه گره ها باشد جلوگیری شود. پیچیدگی این الگوریتم از درجه $O(n^4)$ است.

الگوریتم ***Tessa***

این الگوریتم با یک K_3 شروع میکند. در این روش صفحات مثلثی مورد توجه قرار میگیرد و لیست کلیه مثلثها نگهداری میشود. هر صفحه انتخاب شده برحسب وزن مربوطه انتخاب میگردد و شرط انتخاب آنست که هر صفحه بایستی دارای یک کناره مشترک با زیرگرافهای دیگرداشته باشد. توجه نمایید که در هر مرحله یک کناره یا یک گره و دوکناره اضافه میشود. پیچیدگی این الگوریتم $O(n^5)$ است.

الگوریتم ***Caccetta , Kusumah***

مبنای این روش بر حذف کناره ها به عنوان ایده اصلی کار است. در این روش اضافه نمودن یک یا دو گره به صورت همزمان انجام میشود. اضافه نمودن گره ها بر روی صفحه بین چند گره انجام میشود و لذا شرط مسطح بودن با این روش همواره رعایت میشود.

---

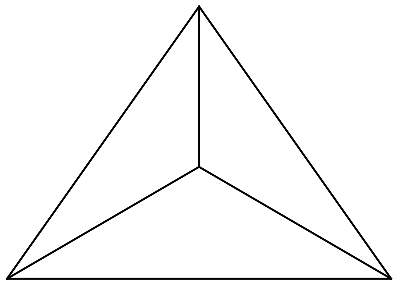
[35] Wheel Expansion Algorithm

[36] Umbrella Effect

<u>*الگوریتم*</u>

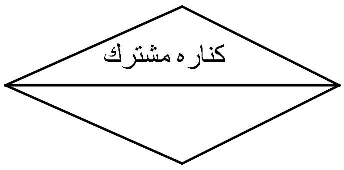
۱ـشروع:

ابتدا چهار گره از میان لیست گره های استفاده نشده انتخاب نمایید که یک گراف کامل K_4 را تشکیل دهد و بیشترین فایده را داشته باشد(بیشترین بهبود را بر تابع هدف بگذارد).



۲ـ ایجاد کاندید :

کلیه صفحاتیکه با یکدیگر مجاور بوده و دارای یک کناره مشترک هستند در نظر بگیرید و به صورت زیر عمل نمایید.



۱ـ۲ـ کناره مشترک را از زوج صفحات حذف نمایید تا یک سیکل دارای چهار گره داشته باشید. گره x را از میان گره های استفاده نشده در سیکل در صفحه به نحوی قرار دهید که با کلیه گره های سیکل مجاور شود.

۲ـ۲ـ کناره مشترک را از زوج صفحات حذف نمایید تا یک سیکل دارای چهار گره داشته باشید.گره x و y را از میان گره های استفاده نشده در سیکل انتخاب نموده و در صفحه به نحوی قرار دهید که $deg(x) = deg(y) = 4$ در این حالت x مجاور y است و هر دو x و y با سه گره در سیکل مجاور باشند.

۳ـ۲ـ کناره مشترک را از زوج صفحات حذف نمایید تا یک سیکل دارای چهارگره داشته باشید. گره x و y را از میان گره های استفاده نشده در سیکل انتخاب نموده و در صفحه به نحوی قرار دهید که $deg(x) = 3 , deg(y) = 5$.

در این حالت x و y مجاور هم بوده و هر یک مجاور به دو گره در سیکل باشند.

٤ـ۲ـ یک گره مانند x را در یکی از زوج صفحات قرار دهید به نحویکه $deg(x) = 3$ و گره x مجاور کلیه گره های صفحه باشد.

۵-۲- گره های x و y را از مجموعه گره های استفاده نشده در یکی از صفحات قرار دهید به نحویکه $deg(x) = 4$ و $deg(y) = 3$ و در آن x مجاور y و کلیه گره ها در صفحه است و y مجاور دو گره دیگر همان صفحه است.

۳- انتخاب کاندید:

از میان کاندیدهای فوق، بزرگترین وزن را انتخاب نمایید و یک زیرگراف براساس اضافه نمودن گره ها ایجاد نمایید. وزن ناشی از اضافه نمودن ۲ گره همزمان از طریق تقسیم بر دو نمودن آنها محاسبه و سپس با دیگر آلترناتیوها مقایسه میشود.

٤- تکرار الگوریتم : به گام ۱ بروید و این کار را آنقدر تکرار نمایید تا گره ای باقی نماند.

درخت پوششی و مسئله حداکثر پوشش مکان استقرار ماشین آلات[۳۷] :

بسیاری از مسائل مکان یابی به تعیین مکان تجهیزات بر روی یک شبکه بازمیگردد که در آن هدف حداکثر یا حداقل نمودن تابعی از فاصله (مسافت) بین تجهیزات و یا بین تجهیزات و گره های شبکه است. یکی خانواده از این مسائل به تعیین مکان بازمیگردد که در آن توزیع به گونه ای صورت گیرد که فاصله بین تسهیلات حداکثر گردد.

گروه دیگر از این مسائل به تعیین مکان تسهیلات بازمیگردد که وزن گره هایی که کمترین فاصله را به تسهیلات دارند، حداکثر شود. مثالهای این گروه مسائل را میتوان در زمینه های مختلف مشاهده نمود.

فرض کنید در یک شبکه جاده ای شهری، نقاط خاصی دارای بیشترین تصادف است و یک مرکز حمل خودروهای آسیب دیده درصدد تعیین مراکز امداد خودی باشد که فعالیت اقتصادی خود را حداکثر نماید بنابراین مسئله تعیین P مرکز امداد برای هر منطقه تصادف i است که دارای احتمال تصادف و ارزش مکانی w_i باشد.

مسئله دیگر از این نوع تعیین مراکز خدمات تصویری (کلوپ ویدیو) است که برای هر مشتری i که دارای ارزش w_i بوده و فاصله ویدیو کلوپ به مشتری i ، r_i باشد، تعداد مراکز خدمات جدید P که سهم بازار را حداکثر نماید، هدف این مسئله خواهد بود. در بخش شبکه های کامپیوتری نیز مسئل مشابه وجود دارد که در آن به جای شبکه جاده ای، شبکه کامپیوتری (اینترنت) وجود دارد و هدف تعیین مکان چندین سرور (مانند مراکز خدمات تصویری) است که سریعترین پاسخ را به مشتریان بدهد و تعداد مشتریان این سرورها را افزایش دهد.

[۳۷] Maximum Coverage Facility Location Problem

مدل عمومی مکان یابی روی شبکه :

اینگونه مسائل را میتوان به صورت یک گراف $G=(v,\bar{t})$ مدل نمود. هر کناره (i,j) گراف مشخص کننده فاصله d_{ij} است. این طول زمان سفر را در مثال شبکه جاده ای و سرعت پاسخ را در شبکه کامپیوتری نشان میدهد. در هر گراف نقاطی در مسئله تعریف میشوند که ممکن است فقط در گره ها نبوده و بر روی کناره ها باشند. به این ترتیب هر نقطه x با فاصله آن از نقاط انتهایی کناره مربوط به خود مشخص میشود.

هر گره در گراف G یک مشتری را نشان میدهد و هر مشتری i دارای یک فاصله مطلوب با شعاع r_i است که در صورت وجود یک خدمت دهنده در فاصله r_i ، مشتری i از آن استفاده میکند. در این حالت گفته میشود که مشتری i ، پوشش[۳۸] داده شده است. هر مشتری دارای وزن (ارزش) w_i است. و با خدمات دادن به هر مشتری به این میزان به سود (مطلوبیت) خدمات دهنده افزوده میشود.

بنابراین مسئله حداکثر نمودن مجموع وزن مشتریانی است که بوسیله حداقل یکی از این خدمات دهنده پوشش داده میشود.

مسئله حداکثر پوشش[۳۹] یک مسئله NP - Hard است و لذا راه حلهای ابتکاری زیادی برای آن ارایه شده است. یکی از راه حلهای ابتکاری الگوریتم جستجو است. در این روش در هر مرحله یک مکان برای تجهیزات انتخاب میشود که بزرگترین افزایش در بازدهی را ایجاد نماید. این روش ادامه می یابد تا آنگاه که تمام P تجهیزات مکان یابی شوند. روشهای دیگر انتخاب تصادفی مکان نیز پیشنهاد شده است. در همین رابطه نشان داده شده است که : "برای یک مجموعه ثابت از تجهیزات، هر گرافی دارای یک زیردرخت است که بیشترین پوشش[۴۰] را دارد".

بر همین اساس سوالی که طرح میشود آنست که آیا راه حلی خوب برای حل مسئله بر روی درخت پوششی[۴۱] وجود دارد و کدام درخت پوششی را بایستی انتخاب نمود که جواب بهترین را در اختیار بگذارد؟

براساس مطالعات انجام شده توسط Megiddo و Zemel و Hakimi (۱۹۸۳) نشان داده شده است که مسئله محدود شده به درخت NP – Hard نیست و الگوریتمهایی با زمانبری $O(n^2 p)$ ارایه شده است.

---

[۳۸] Covered

[۳۹] Maximum Coverage Problem

[۴۰] Subtree with Max. Coverage

[۴۱] Spanning Tree

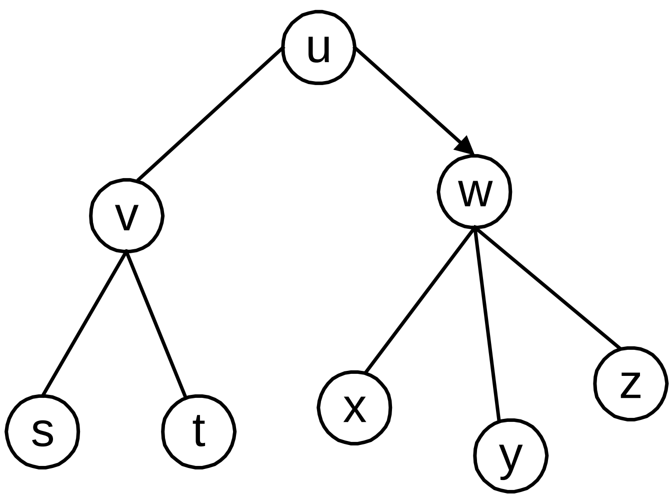
الگوریتم *MCLA*[42] :

الگوریتم حکیمی و همکاران حداکثر پوشش را بر روی درخت انجام میدهد. برای سادگی، گرافی دیگر ایجاد میشود که مکانهای بالقوه در آن گره های گراف هستند. بدین منظور در هر مکان بالقوه که بر روی یک کناره قرار دارد، یک گره اضافه میشود. لذا اگر یک گره جدید لازم باشد تا بر روی کناره (i,j) و در فاصله d از i ایجاد شود یک گره جدید χ' اضافه شده و کناره (i,j) به (χ', j) و (i, χ') تبدیل میشود که دارای طولهای d و $d_{ij} - d$ خواهند بود. این گره های جدید دارای وزن و شعاع پوششی صفر خواهند بود.

از آنجا که تعداد گره های جدیدی که به شبکه اضافه میشود از n بیشتر نمیباشد لذا پیچیدگی مسئله افزایش نخواهد یافت. این الگوریتم به صورت تکرارپذیر عمل میکند.

فرض کنید ریشه درخت را گره x انتخاب نماییم. دو حالت وجود خواهد داشت که در یک مورد x به عنوان مکان تجهیزات جدید انتخاب و در دیگری به عنوان مکان تجهیزات انتخاب نمیشود. در صورتیکه x به عنوان محل یک از تجهیزات انتخاب شود با بررسی زیردرختهای تحت x بایستی عمل تخصیص صورت گیرد. یعنی لازم است p-1 تجهیزات باقیمانده را بین زیردرختها به نحوی تخصیص داد که پوشش بهینه شود. در صورتیکه x به عنوان مکان یکی از تجهیزات انتخاب نشود در آنصورت نه تنها بایستی تخصیص در زیردرختها انجام شود بلکه لازم است تاثیر متقابل بین زیردرختها را نیز مورد مطالعه قرار داد زیرا ممکن است گره یک زیردرخت توسط تجهیزات مستقر در زیردرخت دیگر پوشش داده شود.

نمایش این مسئله را میتوان در شکل زیر ملاحظه نمود، حالتی را فرض نمایید که یکی از تجهیزات در محل ریشه درخت (u) واقع شده باشد و قرار باشد که کلا ۳ دستگاه در این شبکه تخصیص یابد.



شکل ۱ - گراف نمونه برای درخت پوششی

[42] Maximum Coverage Location Algorithm (MCLA)

حـال با در نظر گرفتن دو درخت t_v و t_w بایستی عمل تخصیص را انجام داد. همانطور که از مسـئله مشـخص است، نمیدانیم که دو دستگاه باقیمانده را چگونه در زیردرختها قرار دهیم. آیا هر دو دسـتگاه در t_w و یـا هـر دو دستگاه در t_v و یا در هر زیردرخت یکی از دستگاهها قرار میگیرد. این بررسـی بـه دلـیل آنکه یکی از تجهیزات در گره u قرار دارد پیچیده تر میشود زیرا ممکن است برخی از گره ها در زیردرختها توسط این گره (u) پوشش داده شده باشند.

لـذا بـرای کسـب حداکـثر پوشش در زیردرخت t_v ، یک ماشین در فاصله d_{uv} از گره v (ریشـه زیردرخت) قرار دارد. به همین ترتیب، برای زیردرخت t_w نیز یک ماشین در فاصله d_{uw} قرار دارد.[43]

حالتـی که یکی از تجهیزات در گره u قرار داده نشود، شکل دیگری از بررسی را ایجاد میکند زیرا نه تنها لازم است که ۳ دستگاه را در زیردرختها تخصیص دهیم بلکه لازم است تا تاثیر متقابل ناشی از پوشـش دادن گـره هـای یـک زیردرخـت توسـط زیردرخـت دیگـر را نیز مورد بررسی قرار دهیم. لذا هنگامـیکه حداکـثر خروجی را در زیردرخت t_w مورد بررسی قرار میدهیم لازم است تا اثر یک ماشین دیگـر را کـه در گره v قرار داشته و در فاصله $d_{uv}+d_{uw}$ و یا وجود یک ماشین در گره s و t را نیز در نظر بگیریم.[44]

توابع پایه در الگوریتم حداکثر پوشش :

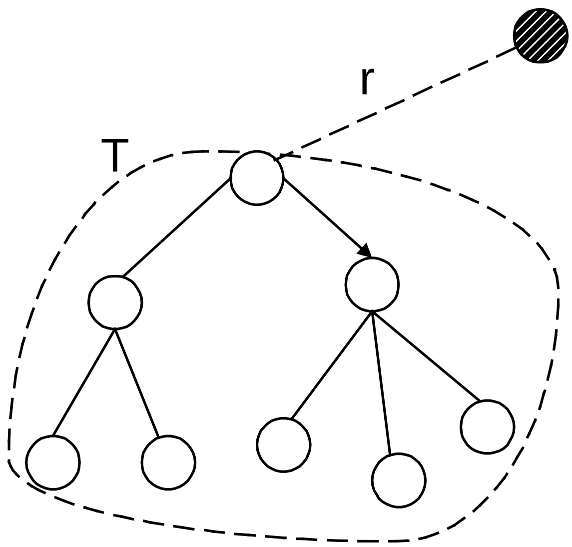
الگوریـتم حکیمی و همکاران برای رفع مشکلات طرح شده در مسائل حداکثر پوشش، توابعی را تعریف نمودند و با بکارگیری این توابع در الگوریتم خود مسئله را حل نموده اند.

تابع ***EXT (T,m,r)***

در ایـن تـابع T بـه مفهـوم یـک درخت با ریشه آن است، m تعداد تجهیزاتی است که بایستی تخصیص یابد و r فاصله ای است که یک ماشین در خارج از این زیردرخت وجود دارد.

[43] در حل مسئله تابعی که این حالت را در الگوریتم مورد توجه قرار دهد، تابع داخلی Internal خوانده میشود.

[44] در حل مسئله تابعی که این حالت را در الگوریتم مورد توجه قرار دهد، تابع خارجی External خوانده میشود.

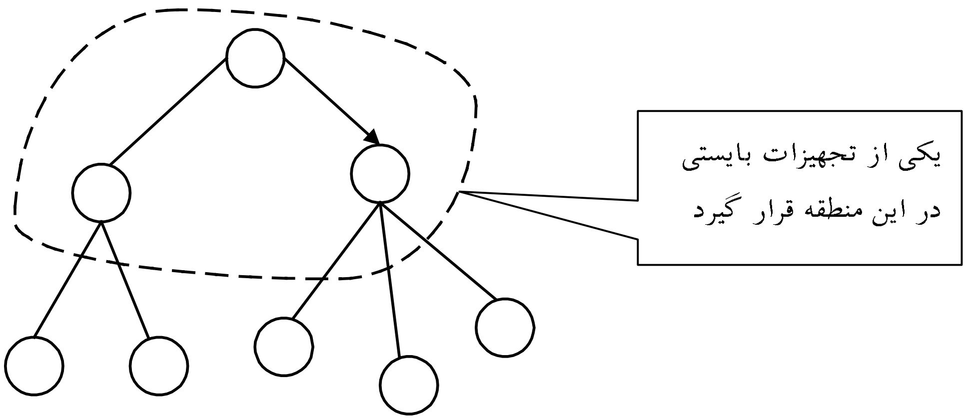


شکل ۲ - وضعیت مرتبط با تابع EXT (T,m,r)

این تابع حداکثر وزن پوشش داده شده در درخت T را با قرار دادن m ماشین جدید و با در نظر گرفتن یک ماشین در نقطه ای با فاصله r از ریشه آن محاسبه میکند.

تابع ***INT (T,m,r)***

در این تابع T به مفهوم یک درخت با ریشه آن است و m تعداد تجهیزاتی است که بایستی تخصیص یابد و r یک عدد صحیح و مثبت است و به این معنی است که حداقل یکی از تجهیزات بایستی در فاصله ای کوچکتر یا مساوی با مقدار r از ریشه T تخصیص یابد.



شکل ۳ - وضعیت مرتبط با تابع INT (T,m,r)

تابع $ALLOC(f_1, f_2, ... f_k | m)$

این تابع مسئله تخصیص منابع را برای توابع با متغییرهای گسسته و دارای شرط زیر حل میکند :

$$f_{(i)} - f_{(i-1)} \geq f_{(i+1)} - f_{(i)} \qquad \forall_i$$

کـه در آن $f_1, f_2, ..., f_k$ توابـع گسسته و یکنوا[45] هستند و لذا تابع Alloc مسئله زیر را حل میکند.

$$\max \sum_{i=1}^{k} f_i(p_i)$$
$$ST. \sum_{i=1}^{k} p_i = m$$

p_i عدد صحیح و غیر منفی است.

الگوریتم :

توابع EXT و INT لازم است که به صورت زنجیره ای یکدیگر را صدا کنند. بدین ترتیب اگر r بـه انـدازه کافـی بـزرگ انتخاب شود مسئله پوشش حداکثر[46] را حل میکنند. در مورد تابع EXT ، r بایسـتی حداقـل بـه بزرگـی بیشـترین فاصـله همسایگی r_i از گره i باشد که از ریشه درخت u عبور میکند. این کار سبب میشود که یک ماشین خارجی هیچ یک از گره های درخت را پوشش ندهد.

در مـورد تـابع INT ، r بایسـتی حداقـل به بزرگی فاصله از گره ریشه ای u تا کلیه گره های درخت باشد و بدین ترتیب محدودیتی برای قرار گرفتن تجهیزات در درخت ایجاد نمیشود.

بدین ترتیب الگوریتم بدین صورت کار میکند که ابتدا بایستی یک گره اختیاری که ریشه درخت T باشد انتخاب نماییم. از این پس T را به عنوان یک درخت ریشه ای مورد استفاده قرار میدهیم. در این حالـت مسـئله حداکـثر پوشـش را میتوان با تابع INT و یا EXT و با انتخاب یک r که به اندازه کافی بزرگ باشد حل نمود.

بـرای محاسبه جدول INT یک گره خاص مانند u لازم است که جداول INT و EXT مربوط به زیر گره های آن وجود داشته باشد و به همین ترتیب برای محاسبه جدول EXT ، لازم است که جدول INT بـرای u و جـداول EXT بـرای زیـر گـره هـای u وجـود داشـته باشد. لذا الگوریتم به صورت زنجـیروار ابـتدا جـداول زیرگـره های مربوطه محاسبه شده و سپس جدول INT مربوط به u و در انتها جدول EXT محاسبه میگردد.

[45] Monotone

[46] Maximum Coverage Problem

خلاصه و نتیجه گیری :

مسئله مکـان یابـی و تخصـیص ماشـین و یا تسهیلات به شکلهای متنوعی تعریف و فرموله شده است ولی عمده این مسائل وقتی که مخصوصا به تعیین مکان چند ماشین باز میگردد از نوع مسائلی طبقه بـندی میشود که راه حل قطعی برای آنها وجد ندارد. به دلیل همین ویژگی است که بسیاری از مسائل با بکارگیری الگوریتمهای ابتکاری به جوابهای موجه و یا بهینه موضعی دست یافته اند.بکارگیری قضایا و تـئوریهای موجود در گراف سبب شده است که برخی از محققین در مدلسازی خود از تئوریهای موجود در گراف و شبکه استفاده نمایند. در این تحقیق سعی بر ان شده است که تقریبا مجموعه مسائل مرتبط با مکان یابی طبقه بندی و ارائه گردد و در حوزه راه حلها بر روی مسائلی تاکید شود که از طریق روشهای مرتبط با گراف مدلسازی و حل شده اند. در جدول یک خلاصه ای از انوع مسائل و راه حلهای مرتبط با آنها که در مهندسی صنایع وکاربردهای صنعتی مشاهده میشود ارائه شده است.

ردیف	نام مسئله	روش حل	توضیحات
۱	مکان یابی خط مستقیم	یافتن میانه	
۲	مکـان یابـی خـط مسـتقیم بـا محدودیت	- برنامه ریزی خطی - برش بر روی شبکه	
۳	مکان یابی بافاصله هندسی	الگوریتمهای ابتکاری	
٤	مکان یابی با فاصله مربع هندسی	حسـاب دیفرانسـیل وحـل چـند معادله همزمان	تابع محدب و بر حسب x,y قابل تفکیک است. جـواب ایـن مسئله، جـواب اولـیه مکـان یابـی با فاصله هندسی است.
٥	تخصـیص مکان چند ماشین جدید در شـبکه بـرای حداقـل کـردن مجمـوع فاصـله از گـره بـه نزدیکترین ما شین	الگوریتمهای ابتکاری	P-median problem
٦	تعیـن مکان چند ماشین جدید در شبکه برای حداقل کردن حداکثر فاصله از گره به نزدیکترین ما شین	الگوریـتم ابـتکاری حکیمـی و همکاران	P-center problem
٧	تخصیص مکان برای ارائه خدمات جهت تقاضای گسسته	در حالـت مسـئله مکـان یابـی روشهای ردیف ۱ الی ٤ در حالت مسئله حمل ونقل؛ روش LAP	اگـر مقـدار جـریان عرضه و مشتری ثابت باشد- مسئله مکان یابی است اگر مکان عرضه ثابت باشد مسئله حمل ونقل خواهد بود
٨	تخصـیص مکـان بـا هزیـنه ثابـت مکان	روشهای شا خه و تحدید برنامه ریزی خطی	مراکز عرضه در محل از پیش معین شده قرار داده میشود.
٩	تخصیص مکان تصادفی	روشهای شا خه و تحدید	تقاضای تصادفی
۱۰	تخصیص بر روی سطح مقصد	روش ابتکاری	تقاضای توزیع شده بر سطح است
۱۱	تخصیص مکان پویا متوالی	تفکـیک مسئله به واحدهای زمانی و حل هر مرحله با LAP	تخصـیص بـر اساس زمان تغییر نموده و توالی آن نیز مهم است

جدول یک - انواع مسائل مکان یابی و روشهای حل موجود

مســائل مکــان یابــی و طرح راه حلهای آنها که در این تحقیق ارائه شده است به طور خلاصه و جهت دسترسی سریع در جدول دو طبقه بندی شده است.

توضیحات	روش حل	نام مسئله	ردیف
P-center problem MVV:min vertex-vertex	الگوریتم کوتاهترین مسیر و رابطه MVV	تعیین مکان چند ماشین جدید در شبکه برای حداقل کردن حداکثر فاصله از گره به نزدیکترین ما شین	۱
General center دارای کوچکترین MVVباشد	ترکیب الگوریتمهای ردیف یک و الگوریتم انتخاب کوچکترین مقدار شاخص	تعیین مکان یک ماشین جدید در شبکه برای حداقل کردن حداکثر فاصله از گره به نزدیکترین ما شین	۲
Absolute center	الگوریتم حکیمی	تعیین مکان یک ماشین جدید در شبکه برای حداقل کردن حداکثر فاصله از هر نقطه به نزدیکترین ما شین	۳
General Absolute center	ترکیب الگوریتمهای ردیف سه و الگوریتم انتخاب کوچکترین مقدار شاخص	تعیین مکان یک ماشین جدید در شبکه برای حداقل کردن حداکثر فاصله از هر نقطه به کلیه ما شین	٤
P-median problem SVV:sum vertex-vertex	الگوریتمهای ابتکاری و محاسبه حداقل مقدار SVV	تخصیص مکان چند ماشین جدید در شبکه برای حداقل کردن مجموع فاصله از گره به نزدیکترین ما شین	٥
General median دارای کوچکترین MVVباشد	ترکیب الگوریتمهای ردیف شش و الگوریتم انتخاب کوچکترین مقدار شاخص	تخصیص مکان یک ماشین جدید در شبکه برای حداقل کردن مجموع فاصله از گره به نزدیکترین ما شین	٦
Absolute median	الگوریتم ردیف ٦ و قضیه وجود میانه مطلق بر روی یک گره	تخصیص مکان یک ماشین جدید در شبکه برای حداقل کردن مجموع فاصله ازنقطه به نزدیکترین ما شین	۷
General Absolute median	الگوریتم کوتاهترین مسیر والگوریتم حکیمی	تخصیص مکان یک ماشین جدید در شبکه برای حداقل کردن مجموع فاصله از هر نقطه به کلیه ما شین	۸
ماشینها گره های گراف بوده و یالها هزینه مجاورت دو ماشین هستند	تعیین گراف پوششی حداکثر و مسطح	تخصیص مکان چند ماشین برای حداقل نمودن هزینه مجاورت و پوشش حداکثر	۹
Maximum coverage location MCL	تعیین درخت پوششی با حداکثر پوشش نقاط مصرف الگوریتم حکیمی و همکاران	تخصیص مکان چند ماشین برای حداکثر پوشش دادن به نقاط مصرف	۸

جدول دو - انواع مسائل مکان یابی بر پایه گراف و روشهای حل موجود

این مجموعه بخشی کوچک از تحقیقاتی است که در این زمینه انجام شده است . بخش دیگری که در ادامه این تحقیق میتواند کاربردهای گراف را در مسئله مکان یابی تصویر نماید در حوزه پیاده سازی مدل است که تبدیل خروجی مقداری را به شکل گرافیکی مکان ماشین ، دپارتمانها ارائه نماید.

والسلام

مراجع :

[1] Louis Cacceta & Yaya S.kusumah,"Graph theoretic Based Heuristics for the facility layout design problem",Curtin University of technology,1998.

[2] Paul Murphy,"A spanning-tree based heuristic for the Maximum coverage facility location problem",Department of computer science & software engineering,the university of newcastle,Austalia,1997.

[3] Francisco Barahona,Fabian chudak,"Near optimal solutions to large scale Facility location problem",IBM research report,1998.

[4] Edward Minieka,"Optimization algorithms for networks and graphs",Marcel Dekker,INC,1978.

[5] Cornne Feremans,Martine labbe,Gilbert laporte,"On Generalized Minimum spanning trees",University of bruxelles,technical report,2000.

[6] J E Beasley,"OR-NOTES",www.ms.ic.ac.uk/jeb/or/facloc.html,2001.

[7] J.Brimberg,G.O.wesolowsky,"Facility location with closest rectangular distances",Naval research logistics,vol47,2000.

[8] Victor chepoi,"A multifacility location problem on median spaces",universitate de stat din moldavi,catedra de cibernetica matematica,2000